Logistisches Wachstum

Teil 2

Aufgabensammlung

Anwendungsaufgaben von e-Funktionen

für die Oberstufe

Stand: 24. April 2023

Datei – Nr. 45831

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Aufgabe 301 (BG 2010 BW)

Der Jahresverbrauch an elektrischer Energie im heutigen Baden-Württemberg kann ab dem Jahr 1900 mit folgender Funktion f näherungsweise beschrieben werden:

$$\boxed{f(t) = \frac{85}{1+e^{-0{,}09t+178}}}\text{; t in Jahren, } t \ge 1900\,.$$

Der Jahresverbrauch wird in Terawattstunden pro Jahr (TWh) Jahr angegeben. (1 TWh = 101^{12} Wh).

3.1.1 Stellen Sie den Jahresverbrauch an elektrischer Energie von 1900 bis 2020 grafisch dar.

Um wie viel Prozent ist der Jahresverbrauch von 1950 bis 2010 an
Geben Sie eine Prognose, wie sich der Jahresverbrauch nach ...sem Modell i... ...unft entwickeln wird.

3.1.2 Wann stieg der Jahresverbrauch an elektrischer Energie am ...rksten?

3.1.3 Berechnen Sie den Gesamtverbrauch an elektrisc... ...ergie v... ...50 bis 2000

3.2 Für die Energieversorgung sollen in Zukunft verstärk... ...oto... ...ikanlagen eingesetzt werden. Bei optimaler Ausrichtung der Solarz...n liefert die So...e im ...igen Baden-Württemberg pro Jahr und pro m2 durchschnittlic...
Die Sonnenenergie wird in d... Solarze... ...mit ein... ...irk...gsgrad von 12 % in elektrische Energie umgewandelt.

Die erwartete Zu...e des Jahr...rbrauchs an e...trischer Energie von 2010 bis 2014 soll durch Solarzellen ab...eckt ...en.

Wie viel ...² ...zellen we... bei optim... Ausrichtung der Solarzellen benötigt?

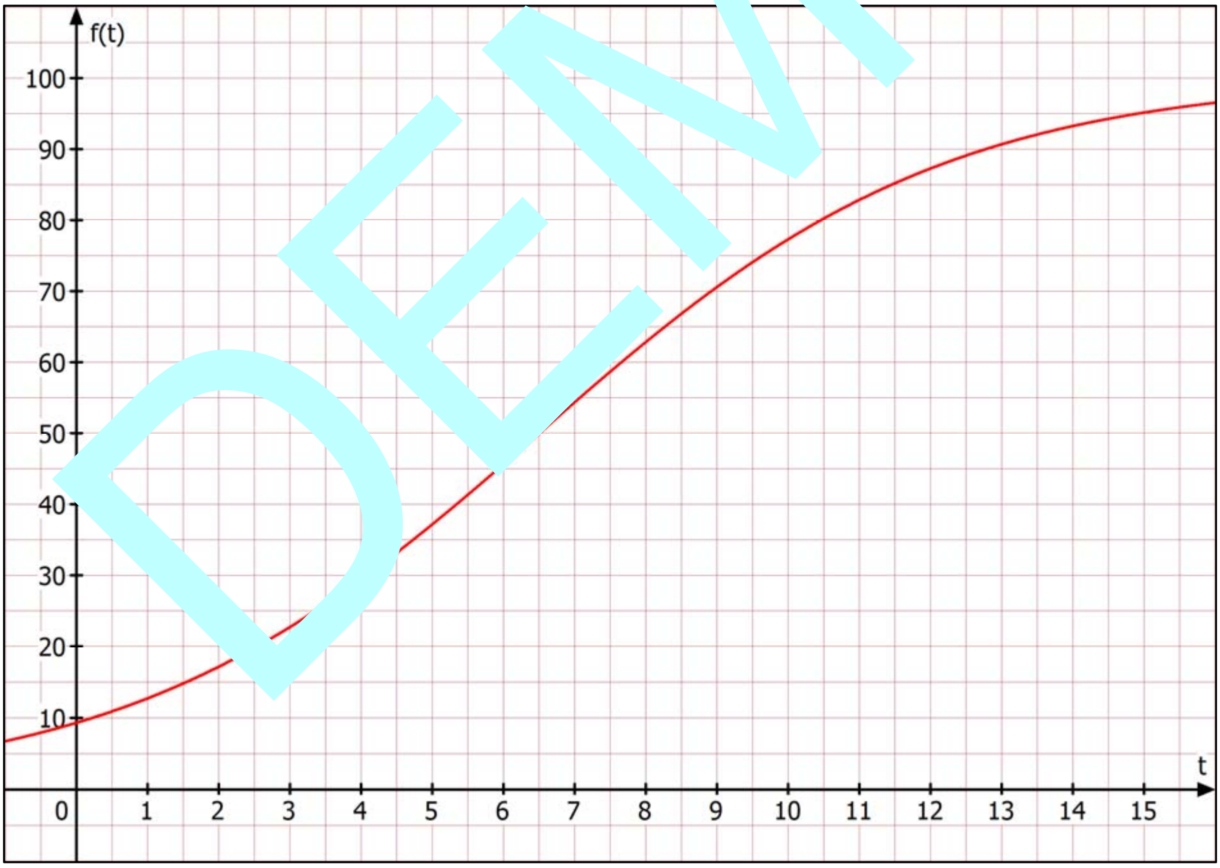
Aufgabe 302

Wahlaufgaben BW 2019 – Aufgabe A 1.1

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \le t \le 17$ die Höhe einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Wochen und f(t) die Höhe in Zentimetern.

a) Geben Sie den Zeitraum an, in dem die Höhe der Pflanze von 20 cm auf 40 cm zunimmt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Pflanzenhöhe 3,5 Wochen nach Beobachtungsbeginn.
Die Funktion f hat bei t = 6,5 eine Wendestelle.
Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sach ammenhang. (4 VP)

b) Formulieren Sie zu der Gleichung $f(t+2)-f(t)=5$ eine Fr estellung im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung de chung a (2,5 VP)



Aufgabe 303

Abi BW 2020 – Aufgabe A 1.1

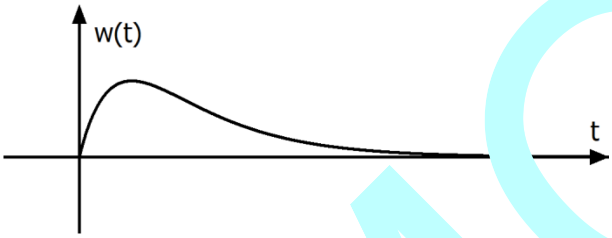
Betrachtet wird das Wachstum einer Palme.

Ihre Höhe beträgt zu Beobachtungsbeginn einen Meter, die momentane Wachstumsrate ihrer Höhe wird durch die Funktion w mit

$$w(t) = 4 \cdot \left(e^{-t} - e^{-2t}\right);\ t \geq 0$$

(t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, w(t) in Meter pro Jahr) beschrieben.

Die Abbildung zeigt den Graphen von w.



a) Geben Sie die momentane Wachstumsrate zum Zeit... an.
Begründen Sie anhand des Graphen ...ass die Höhe d... Palm... abgebildeten Zeitraum nie abnimmt.

Die Funktion w besitzt im a...bildeten Be... eine W...lle.
Beschreiben Sie die B...utung dieser Wende...le im Sachzusammenhang.
Berechnen Sie den ...punkt der m...alen mom...nen Wachstumsrate.

(4 VP)

b) Berechnen ... die Höhe... ahme der P... im zweiten Jahr nach Beobachtungsbeginn.
Besti... Sie ... integra... n F...onsterm der Funktion h, der die Höhe der Palme zum Z...unkt t angibt.

...itteln Sie rechneris... en Zeitpunkt, an dem die Palme eine Höhe von 1,50 m hat.

Unte... hen Sie, welch... öhe die Palme maximal erreichen kann.

Formulier... ie ei... ragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung

$$\frac{h(t+0{,}5)}{h(t)} = 1{,}5$$

führt. (8 VP)

Aufgabe 304

BW 2011 – Aufgabe I 3

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.
Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 150t^2 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und f(t) die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.
Wann erkranken die meisten Personen?
Zeigen Sie, dass ab diesem Zeitpunkt die momentane Erkrankungsrate rückläufig ist.
Wann nimmt sie am stärksten ab?

b) Alle Neuerkrankungen werden sofort dem Gesundheitsamt gemeldet. Bei Beobachtungsbeginn sind bereits 100 Personen gemeldet. Wie viele Personen sind nach 12 Wochen insgesamt gemeldet?
Die Funktion F mit $F(t) = -750 \cdot (t^2 + 10t + 50) \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$ ist eine Stammfunktion von f.
Geben Sie eine Funktion für die Gesamtzahl der gemeldeten Personen nach t Wochen an.
Wann wird die Zahl von 20.000 gemeldeten Personen erreicht?
Weisen Sie nach, dass die Anzahl der Meldungen unter 40.000 bleiben wird.

In einer benachbarten Stadt mit 30.000 Einwohnern ist bei Beobachtungsbeginn bereits die Hälfte der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit alle Einwohner von der Krankheit erfasst werden und dass dabei die momentane wöchentliche Erkrankungsrate proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten Einwohner ist.

c) Man nimmt zur Modellierung zunächst den Proportionalitätsfaktor 0,1 an.
Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an.
Bestimmen sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt.
Wie viele Personen werden demzufolge nach 4 Wochen von der Krankheit erfasst sein?
Tatsächlich sind es nach 4 Wochen bereits 22.000 Personen.
Passen Sie die Funktion an die tatsächliche Situation an.

Aufgabe 305

3.1 Die Höhe h(t) eines Baumes zum Zeitpunkt t wird näherungsweise beschrieben durch

$$h(t) = \frac{35}{160 \cdot e^{-0{,}07632 \cdot t} + 1} \quad \text{mit} \quad t \geq 0$$

Dabei ist t die Zeit in Jahren seit Pflanzung des Baums im Frühling 1930,
h(t) ist in m angegeben.

3.1.1 Berechnen Sie das Jahr, in dem der Baum am schnellsten gewachsen ist.
Wann war der Baum zu 75 % ausgewachsen?

3.1.2 Bestimmen Sie das durchschnittliche Jahreswachstum des Baum[illegible] *[illegible]hn Jahre*.
(Die Aufgabe ist 2013 gestellt worden, also geht es um die Ja[illegible] 2003 bis 2013.[illegible]

3.2 Im Jahr 2013 wird der Durchmesser d(x) des Baumstamms i[illegible]er Höhe x über dem [illegible]den modelliert durch die Funktion d mit

$$d(x) = -3{,}003 \cdot 10^{-9} x^3 + 9{,}000 \cdot 10^{-6} \text{[illegible]}82 \cdot 10 \text{[illegible]}9{,}73$$

d(x) und x sind in cm angegeben.
In diesem Jahr wird der Baum gefällt. [illegible]er Schnitt wird [illegible]einer [illegible]e von 30 cm über dem Boden angesetzt.

3.2.1 Berechnen Sie den Durch[illegible]ser der Schn[illegible]che.
Bestimmen Sie die Lä[illegible] des abgeschnittene[illegible]mms, die sich aus diesem Modell ergibt.

3.2.2 Ermitteln Sie das [illegible]men des [illegible]mms in Kubikmeter.

Kurz vor der Fällung wu[illegible]r Durchmess[illegible]es Baumstamms in der Schnitthöhe auf 40 cm und d[illegible]tamms [illegible]30 m g[illegible]ätzt. Das Volumen des Stamms wurde damit schon v[illegible] geschätzt, wo[illegible]die Form[illegible]tamms vereinfachend als Kreiskegel angenommen [illegible]rde.
Be[illegible]nen Sie die proze[illegible]uale Abweichung des geschätzten Volumens vom oben ermittelten Volum[illegible]

Aufgabe 306

1. Die Wachstumsgeschwindigkeit von Roggen wurde experimentell ermittelt und die Durchschnittswerte in dieser Tabelle zusammengestellt:

Beobachtungszeit t in Monaten	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3.5	4
Wachstumsgeschwindigkeit v in m/Mon.	0	0,48	0,56	0,66	0,58	0,35	0,21	0,1	0,02

Bestimme durch **Regression** eine ganzrationale Funktion f so, dass die mittlere quadratische Abweichung möglichst gering ist.

2. Eine andere Modellfunktion für dieses Roggenwachstum wird durch die Funktion $v(t) = t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$ gegeben. Sie soll die Wachstumsrate (Wachstumsgeschwindigkeit) sim···ieren.

Dabei sei t die Zeit in Monaten seit Beginn des Wachstums. Di··· ...heit von v ··· $\frac{m}{\dots at}$.

a) Begründe, warum die Funktion v die Wachstumsgeschwindi··· it besser darstellt a··· ··e in Teilaufgabe 1 ermittelte ganzrationale Funktion. Zeichne ··· ı das Schaubild der ··· ıktion v.

b) Berechne die Höhenfunktion h der Roggenpflanz··· ··n die B··· ··chtung bei h(0··· 2 cm beginnt.

Berechne die Höhen nach 1, 2 und 3 Monaten.

Berechne die Höhenzunahme im 1. ··· im 2. Monat a··· den ··· ··n.

Berechne die Höhenzunahme im 1. ··· ···onat noc··· ··inmal, ··· aus der Funktion v.

Welche maximale Höhe kan··· ··ie Pflan··· ··reich···

Zeichne das Schaubild v··· ··.

c) Wann hat die Wach··· ··nsgeschwin··· ··eit ihren ··· ··malwert erreicht, und wie groß ist dieser?

Welche Bedeutun··· ··· dieser Z··· ··unkt für die Höhenfunktion bzw. deren Schaubild?

Belege Deine Antwort ··· ··e Rechnung

d) Wann ··· ··re halbe ··· ··ximalh··· erreicht?

H··· ··e dort ihre gro··· Wachst··· ··chwindigkeit?

Lösungen